

Asignatura : Cálculo Diferencial , PMM 1137
Profesor : Emilio Cariaga López.
Ayudante : Sergio Seguel Jara.
Periodo : 2^{do} Semestre 2012.

CAPÍTULO 3: APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. Velocidad Instantánea.

Sesión 1 (29/Oct/2012).

Un dispositivo mecánico lanza una pelota de tenis de manera totalmente vertical hacia arriba con una velocidad de 40 pies por segundo. Se sabe que la altura (medida en pies) de la pelota después que han transcurrido t segundos está dada por:

$$h(t) = 40t - 16t^2.$$

1. Calcule t tal que $h(t) = 0$. Interprete físicamente.
2. Grafique la función $h(t)$ en su *dominio físico*.
3. Calcule el vértice V de la parábola $h(t)$. Recuerde que el vértice $V(x_v, y_v)$ de la parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ está dado por $x_v = -b/2a$ e $y_v = f(x_v)$. Interprete físicamente las coordenadas de V .
4. ¿Cuánto tiempo demora la pelota en regresar al punto de lanzamiento?.
5. Determine el instante de tiempo en que la pelota alcanza su máxima altura.
6. Determine la altura de la pelota cuando ha transcurrido un segundo.
7. ¿En qué instantes de tiempo la altura de la pelota es un tercio de la altura máxima que alcanzó?.
8. Calcule la función derivada: $h'(t)$ indicando explícitamente su dominio físico.

Interpretación Física de $h'(t)$. Velocidad de la pelota en el instante t . En este caso la unidad en que se mide la velocidad es [pies/seg]. Anotaremos $v(t) = h'(t)$.

9. Grafique la función velocidad $v(t) = h'(t)$ en su dominio físico. Compare cualitativamente los gráficos de $h(t)$ y $v(t) = h'(t)$.
10. Calcule la velocidad de la pelota: **(a)** en el instante de su lanzamiento, **(b)** cuando alcanza su máxima altura, **(c)** cuando vuelve al punto de partida. Interprete físicamente los valores numéricos obtenidos.
11. Calcule la *pendiente m de la recta tangente* a la función $h(t)$ en el instante: **(a)** del lanzamiento, **(b)** en que alcanza su máxima altura, **(c)** en que vuelve al punto de partida, **(d)** en que va a medio camino de llegar al punto de máxima altura. Interprete físicamente los valores numéricos obtenidos.
12. Determine la *Ecuación de la Recta Tangente* para cada uno de las pendientes calculadas en en punto anterior.
13. Si uno de sus alumnos le pregunta: *¿para qué sirve la derivada?*. ¿Qué le respondería?

LO MISMO PERO EN EL PLANETA MARTE

Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad inicial de $10[m/s]$, su altura (en metros) después de t segundos se puede calcular como $H(t) = 10t - 1,86t^2$. Repita el análisis que realizó para la pelota de tenis.

2. Razón de Cambio Instantánea.

Sesión 2 (30/Oct/2012).

2.1. Caso 1: Costo Marginal.

El costo (en dólares) C de producir $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ unidades de cierto artículo se puede calcular como

$$C(n) = 5000 + 10n + 0,05n^2.$$

1. Grafique la función C para $n \in [0, 200]$.
2. Calcule el costo de producir 100 unidades.
3. Calcule el número de unidades producidas a un costo de 6 mil dólares.
4. Si el número de unidades aumenta de 100 a 105, calcule la *razón de cambio promedio*, esto es,

$$\frac{C(105) - C(100)}{105 - 100} \left[\frac{\text{dolar}}{\text{unidad}} \right].$$

Interprete la razón obtenida.

5. Si el número de unidades disminuye de 100 a 95, calcule la *razón de cambio promedio*, esto es,

$$\frac{C(95) - C(100)}{95 - 100} \left[\frac{\text{dolar}}{\text{unidad}} \right].$$

Interprete la razón obtenida.

6. Grafique la función $C'(n)$ en el rango $n \in [0, 200]$. (*En Matemáticas Financieras la función C' se denomina Costo Marginal*).
7. Calcule la *Razón de Cambio Instantánea* de C con respecto de n , esto es, $C'(n)$ cuando $n = 100$.
8. Calcule el *Costo Marginal* de producir 100 artículos.

2.2. Caso 2: Ley de Torricelli.

Suponga un tanque cilíndrico que contiene 100000 galones de agua. Se sabe que el vaciado del tanque por su base (a través de un pequeño orificio) ocurre en una hora. La Ley de Torricelli permite calcular el volumen de agua V que queda después de t minutos como

$$V(t) = 100000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2,$$

en donde $0 \leq t \leq 60$.

1. Grafique la función volumen en su dominio físico.
2. ¿Cuántos galones de agua quedan en el tanque después de media hora?.
3. ¿Después de cuánto tiempo el tanque se ha vaciado a la mitad?.
4. ¿Cuál es la *razón de cambio promedio* del volumen con respecto del tiempo entre los instantes $t = 30[\text{min}]$ y $t = 35[\text{min}]$, esto es, $\frac{V(35)-V(30)}{35-30}$? Interprete físicamente el valor numérico obtenido.
5. Grafique $\frac{dV}{dt}$ en su dominio físico. ¿Cuál es la interpretación física de V' ?.
6. Calcule la *razón de cambio instantánea* de V con respecto de t , en el instante $t = 30[\text{min}]$, esto es, $V'(30)$.

2.3. Caso 3: Ley de Boyle.

Según la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene constante o fija, entonces el producto entre su presión P y su volumen V es constante. Suponga que para un cierto gas se cumple que

$$P \cdot V = 800,$$

en donde P se mide en *libras por pulgada cuadrada*, y V en *pulgadas cúbicas*.

1. Calcule la *razón de cambio promedio* de P cuando V se incrementa de $200[\text{pulg}^3]$ a $250[\text{pulg}^3]$.
2. Expresé V como función de P , y demuestre que la *razón de cambio instantánea* de V c/r de P es inversamente proporcional al cuadrado de P .

2.4. Caso 4: Ley del Rumor.

Bajo ciertas condiciones un rumor se esparce según la ecuación:

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}},$$

en donde $p(t)$ es la proporción de la población que lo conoce en el tiempo t , siendo a , y k son constantes positivas.

1. Calcule $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$.
2. Calcule la rapidez con que se esparce el rumor, esto es, $p'(t)$.
3. Grafique las funciones $p(t)$ y $p'(t)$ si $a = 10$, $k = 1/2$, y el tiempo t se mide en horas.
4. Use la gráfica para estimar cuánto tiempo debe transcurrir para que el 80 % de la población escuche el rumor, y la rapidez con que se está esparciendo el rumor en ese instante.

2.5. Caso 5: Modelo Poblacional.

En una granja piscícola se introduce una población de peces en un estanque y se cosecha con regularidad. Un modelo para la razón de cambio de la población establece que

$$\frac{dP}{dt} = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right) P(t) - \beta P(t),$$

en donde r_0 es la rapidez de nacimientos, P_c es la población máxima que el estanque puede sostener (la cual se denomina *capacidad de contención*) y β es el porcentaje de la población que se cosecha.

1. ¿Cuál valor de P' corresponde a una población estable?.
2. Determine P tal que $P' = 0$. Interprete el valor obtenido.
3. Si el estanque puede sostener 10000 peces, la rapidez de nacimiento es del 5 % y la cantidad de cosecha es del 4 %, encuentre el nivel estable de la población.
4. ¿Qué sucede si β se eleva hasta el 5 %?.

3. Optimización.

Sesión 3 (5/Nov./2012).

3.1. Caso 1. Cuadrado de Area Maximal.

Un agricultor dispone de recursos para cercar 100 metros lineales de su campo. El campo cercado debe ser un rectángulo o un cuadrado. El problema consiste en determinar las dimensiones que maximizan el área del polígono. La ejecución de los siguientes pasos le ayudarán a resolver el problema.

1. Construye un dibujo representativo de la situación. Denote con y el ancho, y con x el largo del rectángulo.
2. ¿Cuál es el rango físicamente razonable para x e y ?
3. Expresa el *perímetro* $P = 100[m]$ en términos de x e y .
4. Expresa el *área* A en términos de x e y . Note que así tal cual la función $A = A(x, y)$ depende de dos variables. En el siguiente ítem haremos que dependa sólo de una variable.
5. A partir de la relación obtenida para P despeja y en términos de x . Luego reemplace dicho despeje en A de tal modo que $A = A(x)$. En lo que sigue analizamos la función $A = A(x)$ con mayor detalle.
6. Grafica la función $A = A(x)$ en su *dominio físico*. ¿Qué tipo de curva es?
7. A partir de la gráfica, ¿podrías determinar el valor de x para el cual el área $A = A(x)$ es máxima?
8. A partir del ítem anterior, ¿cuál es la máxima área A a la que puede aspirar el agricultor? Hasta este punto no hemos utilizado la derivada. En lo que sigue haremos una primera exploración sobre su uso en este tipo de problemas.
9. Calcula, define y grafica la función $A'(x)$. Indica explícitamente su *dominio físico*.
10. Calcula x tal que $A'(x) = 0$. Interpreta físicamente, según los resultados obtenidos en los puntos previos.

11. Al interior del dominio físico determina los intervalos en que $A'(x) > 0$, y $A'(x) < 0$. Interpreta físicamente.
12. Si x_{opt} denota el valor óptimo de x , determina el signo de $A''(x_{opt})$.
13. Según los items previos, ¿de qué manera podrías vincular el óptimo $(x_{opt}, A(x_{opt}))$ con el comportamiento de la primera y segunda derivada de la función $A(x)$?. Construye conjeturas.
14. *Nota que este problema lo pudiste resolver casi sin utilizar el cálculo diferencial, básicamente por la forma cuadrática de la función. ¿Cómo proceder, entonces, si la función es más compleja ?. En lo que sigue resolveremos tal cuestión.*

3.2. Caso 2. Caja de Volumen Maximal.

Un industrial desea construir cajas de base cuadrada y sin tapa. Por diseño cada caja debe tener un área superficial de 1000 centímetros cuadrados. El problema consiste en determinar las dimensiones de la caja para las cuales su volumen es máximo.

1. Construye un dibujo representativo de la situación. Denota con y la altura, y con x el lado del cuadrado basal.
2. ¿Cuál es el rango físicamente razonable para x e y ?.
3. Expresa el *área* $A = 1000[cm^2]$ en términos de x e y .
4. Expresa el *volumen* V en términos de x e y . Nota que así tal cual la función $V = V(x, y)$ depende de dos variables. En el siguiente item haremos que dependa sólo de una variable.
5. A partir de la relación obtenida para A despeja y en términos de x . Luego reemplaza dicho despeje en V de tal modo que $V = V(x)$. En lo que sigue analizamos la función $V = V(x)$ con mayor detalle.
6. Grafique la función $V = V(x)$ en su *dominio físico*. ¿Qué tipo de curva es ?.
7. A partir del gráfico, ¿podrías obtener una primera aproximación para los valores óptimos de x e y ?.
8. Calcula, define y grafica la función $V'(x)$. Indica explícitamente su *dominio físico*.

9. Calcula x tal que $V'(x) = 0$. Interpreta físicamente, según los resultados obtenidos en los puntos previos.
10. Evalúa la segunda derivada $V''(x)$ en los valores de x que encontraste en el ítem anterior, y determina su signo. Interpreta tus resultados en términos de la gráfica de la función $V = V(x)$.
11. Concluye indicando las dimensiones optimales de la caja, esto es, su lado basal x_{opt} , su altura y_{opt} , y su volumen $V_{opt} = V(x_{opt})$.

3.3. Caso 3. Triángulo Isóceles de Area Maximal y con Perímetro dado.

Sesión 4 (6/Nov./2012).

Demuestre que de todos los triángulos isocéles, con perímetro $P > 0$ dado, el triángulo equilátero es el que posee mayor área.

1. Construye un dibujo representativo de la situación, esto es, de un triángulo isóceles. Denota con x la longitud de los lados iguales, y como y la longitud del lado basal.
2. ¿Cuál es el rango físicamente razonable para x e y ?.
3. Expresa el *perímetro* P en términos de x e y .
4. Calcula la altura del triángulo isóceles, que cae perpendicular sobre el lado de longitud y .
5. Expresa el *área* A en términos de x e y . Nota que así tal cual la función $A = A(x, y)$ depende de dos variables. En el siguiente ítem haremos que dependa sólo de una variable.
6. A partir de la relación obtenida para P despeja y en términos de x . Luego reemplaza dicho despeje en A de tal modo que $A = A(x)$.
7. Calcula la derivada $A'(x)$.
8. Determina $\tilde{x}$ tal que $A'(\tilde{x}) = 0$.
9. Determina el signo de $A'(x)$ antes y después de $\tilde{x}$.
10. ¿Estás en condiciones de dar una respuesta final?. Justifica y argumenta.