UNIVERSIDAD CATOLICA DE TEMUCO
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas

Asignatura : Cálculo Diferencial, PMM 1137.

Profesor : Emilio Cariaga L.

Periodo : 2do. Semestre 2012.

GUÍA DE EJERCICIOS NRO. 1

Tema: Sucesiones

Martes 7 de Agosto.

1. Escriba los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

   (a) $a_n = 1 - (0{,}2)^n$

   (b) $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$

   (c) $a_n = \frac{3(-1)^n}{n!}$

   (d) $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)\}$

   (e) $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - 1$

   (f) $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n - 1}$

2. Determine una fórmula para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que se mantiene el patrón de los primeros términos:

   (a) $\{1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/9, ...\}$

   (b) $\{1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, ...\}$

   (c) $\{2, 7, 12, 17, ...\}$

   (d) $\{-1/4, 2/9, -3/16, 4/25, ...\}$

   (e) $\{1, -2/3, 4/9, -8/27, ...\}$

   (f) $\{5, 1, 5, 1, ...\}$

3. Determine si la suceción dada converge o diverge. En caso de ser convergente, determine su límite.

   a) $a_n = 1 - (0{,}2)^n$
   b) $a_n = \frac{n^3}{1+n^3}$
   c) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$
   d) $a_n = \frac{n^3}{n+1}$
   e) $a_n = e^{1/n}$
   f) $a_n = \frac{3^{n+2}}{5^n}$
   g) $a_n = \tan(\frac{2n\pi}{1+8n})$
   h) $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{9n+1}}$
   i) $a_n = \frac{n(-1)^{n-1}}{n^2+1}$
   j) $a_n = \frac{n^3(-1)^n}{n^3+2n^2+1}$
   k) $a_n = \cos(n/2)$
   l) $a_n = \cos(2/n)$
   m) $a_n = n^2e^{-n}$
   n) $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
   ñ) $a_n = n\,\mathrm{sen}(1/n)$
   o) $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$
   p) $a_n = (1+\frac{2}{n})^n$
   q) $a_n = \frac{\mathrm{sen}(2n)}{1+\sqrt{n}}$
   r) $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+1)$
   s) $a_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$
   t) $a_n = \frac{n!}{2^n}$
   u) $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$
   v) $a_n = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$.
   w) $a_n = \frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}$.

4. Determine si la sucesión: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 4 - a_n$ es convergente o divergente. ¿Qué ocurre si $a_1 = 2$?.

5. Determine los valores de r para los cuales la sucesión $\{nr^n\}$ es convergente.

UNIVERSIDAD CATOLICA DE TEMUCO
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas

6. Clasifique las siguientes sucesiones como: creciente, decreciente, monótona, o acotada.

   a) $a_n = (-2)^{n+1}$
   b) $a_n = \frac{1}{2n+3}$
   c) $a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$
   d) $a_n = n(-1)^n$
   e) $a_n = ne^{-n}$
   f) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

7. Determine el límite de la sucesión: $\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...\}$.

8. Se define la sucesión: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Demuestre que la sucesión dada es creciente, y que M=3 es una cota superior. Aplique el teorema de la sucesión monótona para demostrar que el límite: $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe. Calcule: $\lim_{n\to\infty} a_n$.

9. Demuestre que si: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n es una sucesión acotada, entonces: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

UNIVERSIDAD CATOLICA DE TEMUCO
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas

10. **Aplicación**. El tamaño de una población de peces inalterada está modelado mediante la fórmula:

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n},$$

en donde p_n es la población de peces después de n años, y a y b son constantes positivas que dependen de las especies y su medio. Suponga que la población en el año 0 es $p_0 > 0$.

  a) Demuestre que $\{p_n\}$ es convergente.

  b) Demuestre que los únicos valores posibles para $\lim_{n\to\infty} p_n$ son 0 y $b - a$.

  c) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.

  d) Demuestre que si $a > b$ entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, esto es, la población muere. Demuestre que si $a < b$ entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$. Interprete este resultado.

11. **Trabajo de Investigación**. Una sucesión que surge en Ecología como modelo de crecimiento poblacional es la *Ecuación en Diferencias Logística*

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n),$$

en donde p_n es el tamaño de la población de la n-ésima generación de una sola especie. Investigue en la literatura cuáles son las condiciones de convergencia.