1) Seno de A = sen A = $\frac{a}{c}$ = $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$

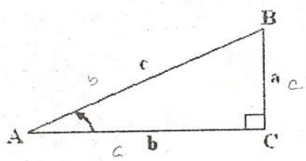
2) Coseno de A = cos A = $\frac{b}{c}$ = $\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$

3) Tangente de A = tg A = $\frac{a}{b}$ = $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$

4) Cotangente de A = ctg A = $\frac{b}{a}$ = $\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}}$

5) Secante de A = sec A = $\frac{c}{b}$ = $\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}}$

6) Cosecante de A = csc A = $\frac{c}{a}$ = $\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}$



Relación entre los lados y los ángulos de un triángulo plano:

Las leyes siguientes son validas para cualquier triangulo plano ABC de lados a, b, c y de ángulos A, B, C.

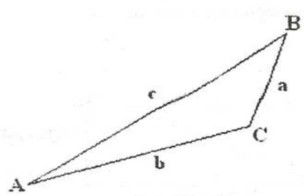
Ley de los senos:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Ley de los cósenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar.



Identidades fundamentales trigonométricas

1) $\tan A = \frac{senA}{\cos A}$

2) $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\cos A}{senA}$

3) $\sec A = \frac{1}{\cos A}$

4) $\csc A = \frac{1}{senA}$

5) $sen^2 A + \cos^2 A = 1$

6) $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

7) $\csc^2 A - ctg^2 A = 1$

Suma y resta de ángulos

8) $sen(A \pm B) = senA\cos B \pm \cos AsenB$

9) $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \pm senAsenB$

10) $\tan(A \pm B) = \frac{tgA \pm tgB}{1 \pm tgAtgB}$

11) $\cot g(A \pm B) = \frac{\cot gA \cot gB \pm 1}{\cot gA \pm \cot gB}$

Ángulo doble

12) $sen2A = 2senA\cos A$

13) $\cos 2A = \cos^2 A - sen^2 A = 1 - 2sen^2 A = 2\cos^2 A - 1$

14) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

15) $sen3A = 3senA - 4sen^3 A$

16) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

17) $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^3 A}$

18) $sen4A = 4senA\cos A - 8sen^3 A\cos A$

19) $\cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1$

20) $\tan 4A = \frac{4\tan A - 4\tan^3 A}{1 - 6\tan^2 A + \tan^4 A}$

Ángulo mitad

21) $Sen^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos A$

22) $\cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2A$

23) $Sen^3 A = \frac{3}{4}senA - \frac{1}{4}sen3A$

24) $\cos^3 A = \frac{3}{4}\cos A + \frac{1}{4}\cos 3A$

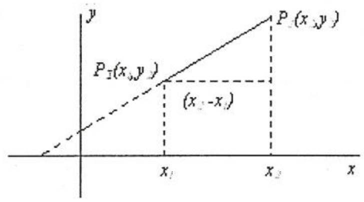
25) $sen^4 A = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2A + \frac{1}{8}\cos 4A$

26) $\cos^4 A = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2A + \frac{1}{8}\cos 4A$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

Distancia *d* entre dos puntos $P_1(x_1, y2)$ y $P_2(x_2, y2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Pendiente *m* de la recta que une los puntos $P_1(x_1, y1)$ y $P_2(x_2, y2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\theta$$

Ecuación de la recta que une los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m \quad \text{ó} \quad y - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Ó $\quad y = mx + b$

Donde: $b = y_1 - mx_1 = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$

es la intersección con el eje Y.

Distancia del Punto (x_1,y_1) a la Recta $Ax + By + C = 0$

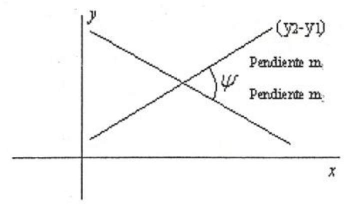
$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Donde el signo se elige de tal manera que la distancia no resulta negativa.

Ángulo ψ entre dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2

$$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Las rectas coinciden o son paralelas sí y solo sí $m_1 = m_2$.
Las rectas son mutuamente perpendiculares sí y solo sí $m_1 = -1/m_2$

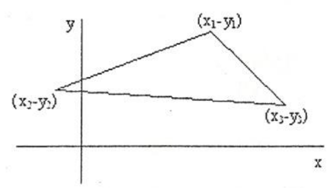


Área del triangulo con vértice $(x_1, y_1, (x_2, y_2, (x_3, y_3)$

$$Area = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \pm\frac{1}{2}(x_1 y_2 + y_1 x_3 + y_3 x_2 - y_2 x_3 - y_1 x_2 - x_1 y_3)$$

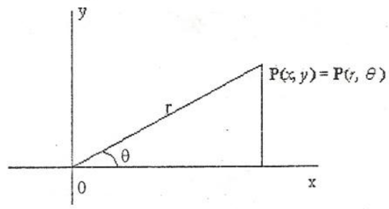
El signo se elige de tal manera que el área no resulta negativa.
Si el área es cero todo los punto están sobre una recta.



Coordenadas polares (r, θ).

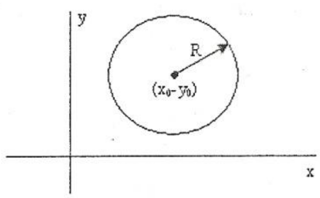
Un punto P se puede localizar por medio de coordenadas rectangulares *(x, y)* o por coordenadas polares *(r, θ)*.
Las ecuaciones de transformación son:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$



Ecuación de la circunferencia de radio R y centro en (x_0, y_0)

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$



FUNCIONES

1- $(f \pm g)x = f(x) \pm g(x)$
2- $(fg)x = f(x)g(x)$
3- $\left(\dfrac{f}{g}\right)x = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
4- $(f.g)x = f(g(x))$
5- $(g.f)x = g(f(x))$

Funciones Pares e Impares

Si *f(-x) = f(x)* es **PAR** (tiene simetría con respecto al eje "y")

Si *f(-x) = -f(x)* es **IMPAR** (tiene simetría con respecto al origen)

Si $\left.\begin{matrix} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{matrix}\right\}$ La función es asimétrica

LÍMITES

1) Sea f una función definida en todo numero de algún intervalo abierto I que contenga a a, excepto, posiblemente, en el numero a mismo. El límite de *f(x)* cuando x tiende a a es L, y se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

2) Si
$\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$

3) Si c es una constante, entonces para cualquier número a, $\lim_{x\to a} c = c$

4) $\lim_{x\to a} x = a$

5) Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

6) Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L \cdot M$$

7) Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y n es cualesquier entero positivo, entonces,

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$$

8) Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$,
entonces, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

9) Si n es un entero positivo y $\lim_{x\to a} f(x) = L$,
entonces $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$
con la restricción de que si n es par, $L > 0$.

10) $\lim_{x\to a}[cf(x)] = cL$

11) Si r es cualquier entero positivo, entonces:

(i) $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$

(ii) $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{x^r} = \begin{Bmatrix} -\infty & si \quad r \quad es\ impar \\ +\infty & si \quad r \quad es\ par \end{Bmatrix}$

12) Si a es cualquier número real, y si
$\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$ donde c es una Constante diferente de 0, entonces:

(i) si $c > 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de *f(x)* $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

(ii) si $c > 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de *f(x)* $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iii) si $c < 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de *f(x)* $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iv) si $c < 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de *f(x)* $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

El teorema también es valido si "$(x \to a)$" se sustituye por "$x \to a^+$" ó "$x \to a^-$".

Si r es cualquier entero positivo, entonces:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Limites importantes:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta}{\theta} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\ln x} = 1$$

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Se dice que una recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f si cuando menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

(i) $\lim_{x \to +\infty} x = b$, y para algún número N, si x > N, entonces, $f(x) \neq b$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} x = b$, y para algún número N, si x < N, entonces, $f(x) \neq b$

ASÍNTOTAS OBLICUAS

Si $f(x) = g(x) / h(x)$, en donde g(x) y h(x) son polinomios y si el grado de *g(x)* es igual al grado de *h(x)* mas uno, entonces la grafica de f tiene una asuntota oblicua con ecuación: $y = ax + b$.

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

CONTINUIDAD

Se dice que una función f es continua en el número a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen para a, se dice que la función f es discontinua en a.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

DERIVADAS

Notación

La derivada se designa por: $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ o y'. El proceso seguido para hallar la derivada se llama derivación o diferenciación.

Definición de la derivada:

Si $y = f(x)$, la derivada de y ó de $f(x)$ con respecto a x se define como:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Donde $h = \Delta x$

REGLAS GENERALES DE DERIVACIÓN

1) $\frac{d}{dx} c = 0$

2) $\frac{d}{dx} cx = c$

3) $\frac{d}{dx} cx^n = cnx^{n-1}$

4) $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm ...) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm ...$

5) $\frac{d}{dx} cu = c \frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

7) $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$

8) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

9) $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

10) $\frac{dF}{dx} = \frac{dFdu}{dudx}$ (Regla de la cadena)

11) $\frac{d}{dx}u = \frac{du}{dx}$

12) $\frac{dF}{dx} = \frac{dF/du}{dx/du}$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y DE LAS TRIGONOMETRICAS INVERSAS.

1) $\frac{d}{dx} sen\,(u) = cos\,(u)\frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx} cos\,(u) = -sen\,(u)\frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx} tan\,(u) = sec^2\,(u)\frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx} cot\,(u) = -csc^2\,(u)\frac{du}{dx}$

5) $\frac{d}{dx} sec(u) = sec(u)tan(u)\frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx} csc\,(u) = -csc\,(u)cot\,(u)\frac{du}{dx}$

7) $\frac{d}{dx} sen^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

8) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

9) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

10) $\frac{d}{dx}\cot^{-1}(u) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

11) $\frac{d}{dx}\sec^{-1}(u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$

12) $\frac{d}{dx}\csc^{-1}(u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$

DERIVADA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.

1) $\frac{d}{dx} Log_a = \frac{Log_a e}{u}\frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}Log_e u$

3) $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}u^v = \frac{d}{dx}e^{v\ln u} = e^{v\ln u}\frac{d}{dx}[v\ln u] = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v\ln u\frac{dv}{dx}$

REGLA DE L'HOPITAL

Supóngase que f y g son derivables y que $g'(x) \neq 0$ cerca de a (a excepto quizás en a). Supóngase que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ o que}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ y } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \text{ entonces}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

INTEGRALES INDEFINIDAS

Si $\frac{dF}{dx} = f(x)$, entonces F es una función cuya derivada es $f(x)$ y se denomina *antiderivada*, primitiva o integral definida de $f(x)$, lo cual se escribe $\int f(x)dx$.

Por si F= $\int f(u)du$, **entonces** $\frac{dF}{du} = f(u)$.

Puesto que la derivada de una constante es cero todas las primitivas de f difieren entre si por una constante arbitraria.

REGLAS GENERALES DE INTEGRACION

1) $\int a\,dx = ax$

2) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)dx$

3) $\int (u \pm v \pm w \pm ...)\,dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx$

4) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ **(integración por partes)**